



سوالات پیشنهادی

کوئیز چهارم

پرسش ۱ (۲۵ نمره) اگر A و B دو ماتریس $n \times m$ و $m \times n$ و ناصفر و ماتریس $I + AB$ وارون پذیر باشد؛

(آ) (۱۵ نمره) نشان دهید ماتریس $I + BA$ وارون پذیر است.

(ب) (۱۰ نمره) درستی معادله

$$B(I + AB)^{-1} = (I + BA)^{-1}B$$

را ثابت کنید.

پاسخ

(آ) معادله $(I + BA)x = 0$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$(I + BA)x = 0$$

$$BAx = -x$$

$$ABAx = -Ax$$

$$(AB + I)Ax = 0$$

چون $(AB + I)$ معکوس پذیر است، باید داشته باشیم: $Ax = 0$. چون $A \neq 0$ ، $x = 0$. یعنی معادله $(I + BA)x = 0$ تنها جواب بدیهی دارد. در نتیجه ماتریس $I + BA$ وارون پذیر است.

(ب) معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$B + BAB = BAB + B$$

با فاکتور گرفتن از B داریم:

$$B(I + AB) = (BA + I)B$$

$$B(I + AB) = (I + BA)B \implies B(I + AB)(I + AB)^{-1} = (I + BA)B(I + AB)^{-1}$$

$$\implies B = (I + BA)B(I + AB)^{-1}$$

$$\implies (I + BA)^{-1}B = (I + BA)^{-1}(I + BA)B(I + AB)^{-1}$$

$$\implies (I + BA)^{-1}B = B(I + AB)^{-1}$$